78e Année Août-Septembre 1967 N° 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Sujets donnés aux concours des Agrégations et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1967.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et Mathématiques spéciales.

5787. — Étant donné un ensemble E et une application f de E dans lui-même, on dira que n éléments rangés de E, notés $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$, *forment cycle pour* f si $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sont distincts de a_1 et si

$$f(a_1) = a_2, \quad f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_{n-1}) = a_n \quad \text{et} \quad f(a_n) = a_1.$$

L'image de a_1 par f^h sera notée a_{h+1} pour tout entier h positif $(a_{h+n} = a_h)$.

Lorsque E est un espace vectoriel, un endomorphisme f sera dit *cyclique d'ordre* n s'il existe au moins un sous-ensemble de n vecteurs engendrant E et un ordre de rangement tel que ces vecteurs forment cycle pour f.

De même, une transformation affine g d'un espace affine $\mathcal{E}$ sera dite *cyclique d'ordre* n s'il existe au moins un sous-ensemble de n points engendrant $\mathcal{E}$ et un ordre de rangement tel que ces points forment cycle pour g.

I. — A. — E est un espace vectoriel réel de dimension 2 et f un endomorphisme de E, cyclique d'ordre n.

1° Montrer que dans un cycle pour f :

deux vecteurs quelconques sont distincts;

deux vecteurs consécutifs forment une base de E.

Établir les relations

$f^n = \mathrm{I}$ (I endomorphisme identique),

$f^m \neq \mathrm{I}$ quel que soit l'entier m compris strictement entre 0 et n.

Peut-on construire un cycle pour f à partir d'un vecteur donné?

2° Montrer qu'il existe des bases de E dans lesquelles f est représenté par une matrice du type $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$; établir que :

a vaut $+1$ ou -1;

a et b sont indépendants du choix d'une telle base;

on a $f^2 = a\mathrm{I} + bf$.

Montrer que le polynôme $\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda - a$ ne peut avoir de racine double.

Caractériser f lorsque $\mathrm{P}(\lambda)$ a ses racines réelles.

3° On suppose désormais que les racines de $\mathrm{P}(\lambda)$ ne sont pas réelles. Soit $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_n$ un cycle pour f. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique, φ, unique, stable par f et telle que l'on ait $\varphi(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_1) = 1$. [On rappelle qu'une forme bilinéaire φ est stable par un endomorphisme f si l'on a $\varphi[f(\mathrm{X}), f(\mathrm{Y})] = \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ pour tout couple X, Y de vecteurs.]

Montrer que φ définit sur E une structure euclidienne. Quelle est l'interprétation de f dans cette structure? Quelle est alors la figure formée par $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_n$?

4° On pose $\varphi(V_1, V_2) = \cos\theta$; exprimer au moyen de θ :

$\varphi(V_k, V_l)$, k et l étant deux entiers quelconques;
V_k sous forme de combinaison linéaire de V_1 et V_2;
f^h comme combinaison linéaire de f et de I pour tout entier relatif h.

B. — $\mathcal{E}$ est un espace affine réel de dimension 2, associé à l'espace vectoriel E; g est une transformation affine de $\mathcal{E}$, cyclique d'ordre n.

1° Montrer que l'endomorphisme f de E associé à g est cyclique d'ordre n.

Montrer que g admet un point fixe unique.

Une transformation affine de $\mathcal{E}$ associée à un endomorphisme cyclique de E est-elle cyclique?

2° Montrer qu'il existe des ellipses globalement invariantes par g; et que, par les points d'un cycle pour g, il passe une telle ellipse et une seule.

3° On donne n et trois points A_1, A_2, A_3. Existe-t-il une transformation affine cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3 soient trois points consécutifs d'un cycle? Dans l'affirmative, indiquer le nombre de solutions et, pour chacune d'elles, préciser la position du point fixe.

Comment doivent être liés quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 pour qu'il existe une transformation affine cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3 et A_4 soient quatre points consécutifs d'un cycle?

4° Pour $n = 6$ et A_1, A_2 donnés, construire A_4, A_5, A_6, connaissant A_3. Si l'on suppose de plus le plan euclidien, pour quels points A_3 l'hexagone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ a-t-il deux côtés consécutifs égaux?

II. — E est maintenant un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme de E, cyclique d'ordre n.

1° Établir la relation $f^n = I$ (I endomorphisme identique).

Montrer que :

I, f, f^2 sont linéairement indépendants;
dans une base convenable, f est représenté par une matrice du type

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix};$$

— le polynôme $P(\lambda) = \lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a$ divise $\lambda^n - 1$.

2° Montrer que f admet une valeur propre réelle, unique et non multiple.

Quelle est cette valeur propre lorsque f est direct (c'est-à-dire de déterminant positif)? Calculer a, b, c, connaissant l'argument θ d'une des valeurs propres non réelles.

Répondre aux mêmes questions lorsque f est indirect (c'est-à-dire de déterminant négatif); y a-t-il dans ce cas une condition sur n?

Caractériser au moyen de ses valeurs propres un endomorphisme cyclique d'ordre n de E.

3° Soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ un cycle pour f.

Démontrer que, si f est direct, les différences

$$V_2 - V_1, \quad V_3 - V_2, \quad \ldots, \quad V_n - V_{n-1}, \quad V_1 - V_n$$

sont contenues dans le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 2 (en abrégé : plan) stable par f et forment cycle pour f.

Démontrer que, si f est indirect et n multiple de 4, les sommes

$$V_1 + V_2, \quad V_2 + V_3, \quad \ldots, \quad V_{n-1} + V_n, \quad V_n + V_1$$

sont contenues dans le seul plan de E stable par f et forment cycle pour f. Étudier ces sommes lorsque f est indirect et que n n'est pas multiple de 4.

4° Montrer qu'on peut munir E d'un produit scalaire rendant f orthogonal.

Décrire alors la configuration d'un cycle pour f dans les différents cas rencontrés au II, 3°; en fixant $n = 6$, faire une figure relative à chacun des cas.

5° Soit g une transformation affine cyclique d'un espace affine $\mathcal{E}$ associé à l'espace vectoriel E, et soit f l'endomorphisme de E associé à g. Démontrer que :

f est cyclique de même ordre que g;
f est indirect;
g admet un point fixe unique.

III. — On se propose, indépendamment des deux parties précédentes, d'étudier les endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E complexe de dimension p.

On appellera *cycle propre d'ordre* n de E, tout système de n vecteurs engendrant E et formant cycle pour au moins un endomorphisme de E.

On pose $r = \exp \frac{2i\pi}{n}$. Les égalités

$$W_k = r^k V_1 + r^{2k} V_2 + \cdots + r^{nk} V_n \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

associent à n vecteurs rangés $V_1, V_2, \ldots, V_n$, n vecteurs $W_1, W_2, \ldots, W_n$.

1° Dans l'hypothèse où $V_1, V_2, \ldots, V_n$ forment cycle pour un endomorphisme f de E, calculer les $f(W_k)$.

2° On suppose $n = p$. Montrer que tout système de p vecteurs indépendants est un cycle propre, l'endomorphisme associé étant unique; diagonaliser cet endomorphisme.

3° On suppose $n > p$. Montrer que, si $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont les vecteurs d'un cycle propre, $n - p$ parmi les vecteurs W_k sont nuls et les p autres sont non nuls; on désigne ces derniers par $U_1, U_2, \ldots, U_p$ et par $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les valeurs r^k correspondantes. Établir l'unicité de l'endomorphisme associé et calculer $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en fonction de $U_1, U_2, \ldots, U_p$ et de $r_1, r_2, \ldots, r_p$.

4° Caractériser par leurs valeurs propres les endomorphismes cycliques d'ordre n de E.

Un tel endomorphisme f étant donné, comment choisir un vecteur V pour que ses images successives par f forment un cycle propre?

5° On donne p vecteurs indépendants rangés $V_1, V_2, \ldots, V_p$. Montrer qu'il existe au moins un endomorphisme f cyclique, dont l'ordre n est donné $(n \geqslant p)$, pour lequel $V_1, V_2, \ldots, V_p$ sont p vecteurs consécutifs d'un cycle.

6° Étant donné un endomorphisme cyclique d'ordre n de E, présenter une structure hermitienne le rendant unitaire.

Dans le cas d'un espace vectoriel réel de dimension p, démontrer que, pour tout endomorphisme cyclique, il existe une structure euclidienne le rendant orthogonal.

IV. — Soit F un espace projectif complexe ou réel de dimension p. On désigne par E l'espace vectoriel associé à F.

On appellera *cycle propre d'ordre* n de F tout système de n points engendrant F et formant cycle pour au moins une homographie de F.

Une homographie h de F sera dite *cyclique d'ordre* n si elle est associée à au moins un cycle propre d'ordre n de F.

1° Montrer que, lorsque F est complexe, un système de n points est un cycle propre si, et seulement si, il existe dans E un système de représentants de ces points qui soit un cycle propre d'ordre n.

Montrer que, lorsque F est réel, cette propriété est encore vraie si n est impair, ou si n et p sont pairs tous les deux. Dans le cas où n est pair et p impair, montrer qu'une homographie cyclique d'ordre n de F (réel) peut être représentée par un endomorphisme cyclique de E d'ordre n ou $2n$.

2° Montrer que tout système de $p + 1$ points indépendants de F est un cycle propre de F.

Montrer que tout système de $p + 2$ points, tels que $p + 1$ quelconques d'entre eux soient indépendants, est un cycle pour une homographie et une seule.

3° F est réel de dimension 2. Montrer que toute homographie cyclique h admet un point invariant, qu'elle laisse globalement invariante une droite et une seule et que tous les points d'un cycle pour h sont sur une conique globalement invariante par h.

Peut-on réduire une telle homographie à une transformation cyclique affine?

4° On suppose F réel. Discuter, suivant les parités de n et de p, combien une homographie cyclique d'ordre n laisse de points invariants et de droites globalement invariantes.

Une homographie cyclique de F peut-elle être réduite à une transformation cyclique affine par le choix de l'hyperplan à l'infini?

5° F est réel de dimension 3. Soit h une homographie de F (prolongée sur le complexifié de F) cyclique d'ordre n, ne laissant invariant aucun point réel, et soit f un endomorphisme cyclique associé à h.

a) Montrer que h laisse invariants quatre points non réels, deux à deux conjugués, que l'on désigne par A et $\overline{A}$, B, et $\overline{B}$; on appelle D et D′ les droites $A\overline{A}$, et $B\overline{B}$.

Montrer que, pour que h^2 laisse globalement invariante au moins une droite réelle autre que D et D′, il faut et suffit que f ait ses valeurs propres deux à deux opposées.

On suppose dans toute la suite cette condition réalisée.

b) Montrer que h^2 n'a pas de point réel invariant. Montrer qu'il existe une relation linéaire entre I, endomorphisme identique de E, f^2 et f^4. Étant donné un point M_1, étudier la figure formée par M_1 et ses images successives par h^2 et montrer que par tout point réel passe une droite et une seule globalement invariante par h^2.

Montrer que, pour qu'une quadrique propre réelle soit globalement invariante par h, il est nécessaire et suffisant qu'elle contienne les quatre côtés de l'un ou l'autre de deux quadrilatères gauches, que l'on précisera.

Montrer que, par tout point réel non situé sur D ou D′, passent deux quadriques propres réelles globalement invariantes par h. Quelle est leur intersection?

Étant donné une droite réelle globalement invariante par h^2, préciser la correspondance entre cette droite et son image par h.

Cette étude (IV, 5°, *b*) peut-elle être généralisée à des homographies non cycliques de F?